Cassiniho dynamika, Colombův setrvačník

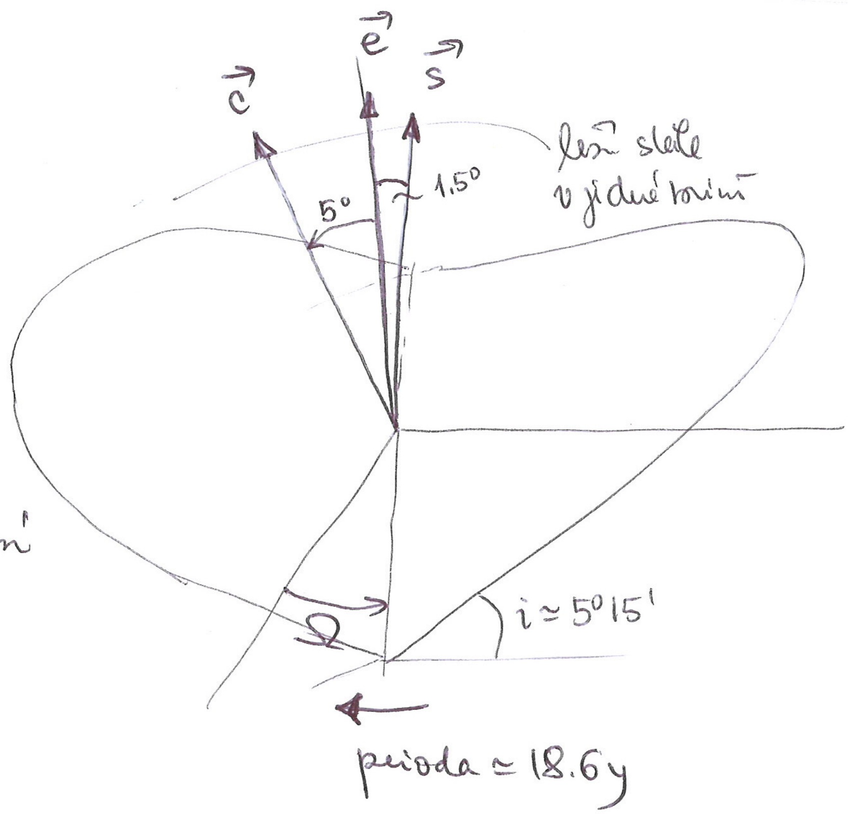
V roce 1693 Domenico Cassini formuloval 3 zákony pozorování o rotačním stavu Měsíce:

1. • střední rotační perioda rotace Měsíce je rovna střední oběžné periodě kolem Země (1/1 spin-orbitální resonance).

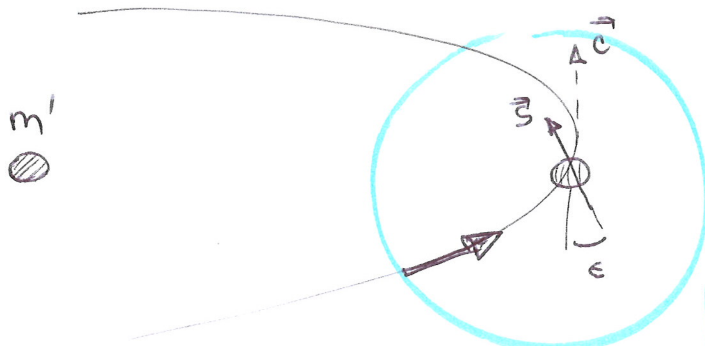
2. • $\vec{s}$ (rotační osa Měsíce) a $\vec{e}$ (normála k ekliptice) udržují stálý vzájemný úhel $\simeq 1°32'$, i.e. $\vec{s}$ precesuje kolem $\vec{e}$ po kuželu s tímto úhlem otevření.

3. • $(\vec{c}, \vec{s}, \vec{e})$ leží stále v jedné rovině, tj. $\vec{s}$ leží stále v rovině definované vektory $\vec{e}$ a $\vec{c}$ (normála k dráze Měsíce). [též někdy: výstupní uzel lunární dráhy je stále shodný se sestupným uzlem lunárního rovníku].

V této kapitole se pokusíme popsat jaké dynamické principy stojí za zákony 2 a 3. Zjevně jde o projev vnitřní resonance mezi precesí uzlu dráhy Měsíce a precesí jeho rotační osy.



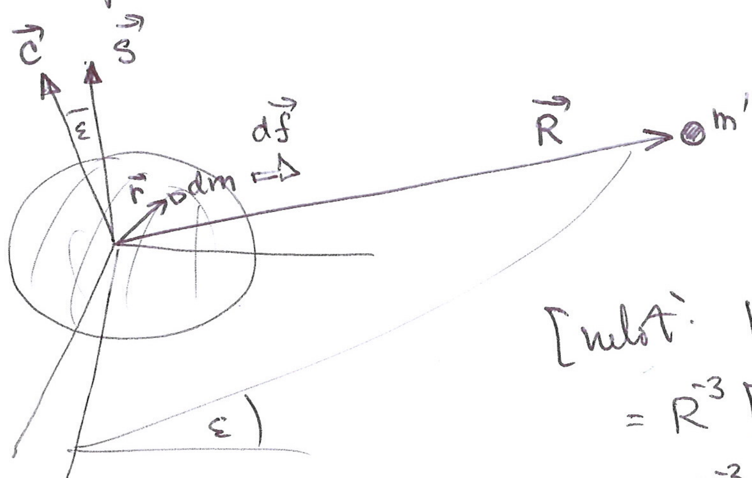
▲ první krok: Odvození precesní frekvence díky gravitačním poli centrálního tělesa.



předpokládejme rotaci kolem hlavní osy tenzoru momentu setrvačnosti (C); pak

$$\boxed{\frac{d\vec L}{dt} = \vec T} \qquad \vec L = C\omega \vec s$$

potřebujeme tedy vyčíslit $\vec T$ díky gravitačním působení centra $\underline{m}$, resp. zajímáme se o dlouhodobé pohyby, tj. vystředujeme $\vec T$ přes jeden oběh tělesa kolem $\underline{m}$.



$$d\vec f = Gm'dm \frac{\vec R - \vec r}{|\vec R - \vec r|^3} =$$

$$= Gm'dm \frac{\vec R - \vec r}{R^3}\left[1 + 3\frac{\vec R\cdot\vec r}{R^2} + O\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\right]$$

$$\Big[\text{neboť: } |\vec R - \vec r|^{-3} = (R^2 + r^2 - 2\vec r\cdot\vec R)^{-3/2} =$$

$$= R^{-3}\left[1 - 2\vec r\cdot\vec R/R^2 + O(2)\right]^{-3/2} =$$

$$= R^{-3}\left[1 + 3\frac{\vec r\cdot\vec R}{R^2} + O(2)\right]\Big]$$

tedy celkový moment síly působící na těleso je

$$\vec T = \int_V \vec r \times d\vec f = \frac{Gm'}{R^3}\int_V \vec r \times \vec R\left[1 + 3\frac{\vec R\cdot\vec r}{R^2} + \dots\right] dm =$$

$$= \frac{Gm'}{R^3}\underbrace{\left(\int_V dm\, \vec r\right)}_{=0} \times \vec R + \frac{3Gm'}{R^5}\vec R \cdot \int_V dm'\, \vec r\,\vec r \times \vec R + O(r^2/R^2)$$

připomeňme $\boxed{I_{ij} = \int dm\,(\delta_{ij} r^2 - r_i r_j)}$

$$\vec T \simeq \frac{3Gm'}{R^5}\vec R \cdot \overleftrightarrow{I} \times \vec R + \dots$$

v systému hlavních os $\overleftrightarrow{I} = \mathrm{diag}(A, B, C)$

Pro sekulární dynamiku rotační osy $\vec s$ nahradíme $\vec T$ jeho střední hodnotou počítanou přes jeden oběh tělesa kolem centra m'. $\vec T \to \bar{\vec T} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dl\, \vec T =$

$$= \frac{1}{2\pi\eta}\int_{-\pi}^{\pi} df \left(\frac{R}{a}\right)^2 \vec T$$

$$\bar{\vec T} = \frac{1}{2\pi\eta}3Gm'\int_{-\pi}^{\pi} df \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{1}{R^3}\left(\cos f\,\vec e_p + \sin f\,\vec e_a\right)\cdot \overleftrightarrow{I} \times \left(\cos f\,\vec e_p + \sin f\,\vec e_a\right)$$

$$= \frac{3Gm'}{a^3\eta^3}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} df \left(\frac{a\eta^2}{R}\right)\Big\{\cos^2 f\,\vec e_p\cdot\overleftrightarrow{I}\times\vec e_p + \sin^2 f\,\vec e_a\cdot\overleftrightarrow{I}\times\vec e_a + \cancel{\sin f\cos f\left[\vec e_a\cdot\overleftrightarrow{I}\times\vec e_p + \vec e_p\cdot\overleftrightarrow{I}\times\vec e_a\right]}\Big\}$$

sudé $f \to -f$

liché $f \to -f$

[def $b = a\eta$]

liché mocniny $\cancel{\cos f}$

$$= \frac{3Gm'}{b^3}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} df\,(1 + \cancel{e\cos f})\left[\cos^2 f\,\vec e_p\cdot\overleftrightarrow{I}\times\vec e_p + \sin^2 f\,\vec e_a\cdot\overleftrightarrow{I}\times\vec e_a\right]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{Gm'}{b^3}\left[\vec e_p\cdot\overleftrightarrow{I}\times\vec e_p + \vec e_a\cdot\overleftrightarrow{I}\times\vec e_a\right]$$

? ve skutečnosti jsme zde nevědomky využívali předpoklad, že rotace a oběžný pohyb nejsou v resonanci, tak jako u Měsíce či Merkuru; takováto úprava však již přesahuje rámec této přednášky a je předložena jen k samostatnému promyšlení. Věc je v tom, že $\overleftrightarrow{I}$ obecně není konstantní ale v resonančních případech může být funkcí f: $\overleftrightarrow{I}(f)$ a to bychom měli vzít v potaz při výše naznačeném středování.

Ve vlastním systému tělese:

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} = \left(C - \tfrac{1}{2}(A+B)\right)\mathbb{E}_{33} + \tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathbb{1} + \tfrac{1}{2}(B-A)\left(\mathbb{E}_{22} - \mathbb{E}_{11}\right)$$

kde jsme označili

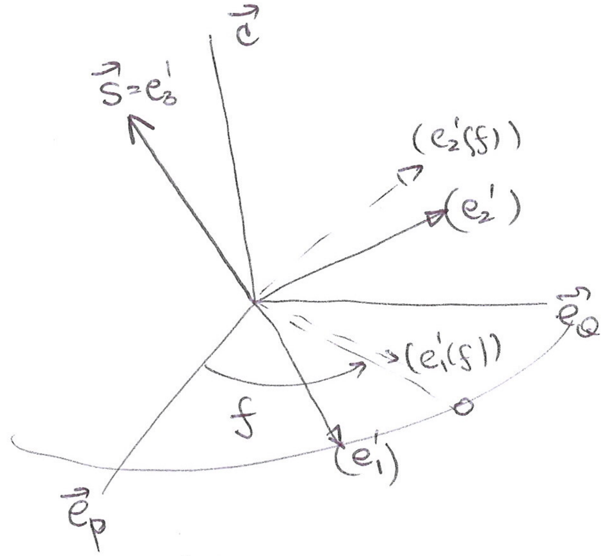
$$\mathbb{1} = \mathrm{diag}(1,1,1)$$

$$\mathbb{E}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Samozřejmě dosazením $\mathbb{1}$ místo $\overleftrightarrow{I}$ dostaneme nulový příspěvek do $\vec{T}$.

- podívejme se nyní na výsledek při dosazení prvního členu z rozpisu $\overleftrightarrow{I}$, tj. $\left(C - \frac{1}{2}(A+B)\right)\mathbb{E}_{33}$. Takto vypadá $\overleftrightarrow{I}$ v systému v tělese, ale v obecném systému; např. vázaném na $(\vec{e}_P, \vec{e}_a, \vec{c})$ triádu orbitální dráhy kde $e_3' \to \vec{s}$.



$$\vec{x} = \mathbb{R}\cdot\vec{x}'$$

kde

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} e_{1x}', & e_{2x}', & s_x \\ e_{1y}', & e_{2y}', & s_y \\ e_{1z}', & e_{2z}', & s_z \end{bmatrix}$$

Jelikož $\overleftrightarrow{I}$ je tenzorová veličina, je

$\overleftrightarrow{I} = \mathbb{R}\mathbb{R}\overleftrightarrow{I}'$; kde $\overleftrightarrow{I}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \mathbb{E}_{33}$ komponenty

je odpovídající $\overleftrightarrow{I} = \vec{s}\vec{s}$ (neboť $I_{ij} = s_i s_j$)

Pak odpovídající příspěvek do $\vec{T}$ je

$$\vec{T} = \frac{3}{2}\frac{Gm'}{b^3}\left[(\vec{e}_p\cdot\vec{s})(\vec{s}\times\vec{e}_p) + (\vec{e}_Q\cdot\vec{s})(\vec{s}\times\vec{e}_Q)\right]\cdot\left[C - \tfrac{1}{2}(A+B)\right]$$

Nyní se opřeme o matematický teorém: v libovolné triádě (ortonormální) vektorů $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je pro libovolný vektor $\vec{s}$:

$$(\vec{s}\cdot\vec{a})(\vec{s}\times\vec{a}) + (\vec{s}\cdot\vec{b})(\vec{s}\times\vec{b}) + (\vec{s}\times\vec{c})(\vec{s}\cdot\vec{c}) = 0$$

[snadno ověříme ve složkách]. Pak tedy

$$\boxed{\vec{T} = -\frac{3}{2}\frac{Gm'}{b^3}\left[C - \tfrac{1}{2}(A+B)\right](\vec{c}\cdot\vec{s})(\vec{c}\times\vec{s})}$$

Nyní nám zbývá část $\sim \frac{1}{2}(B-A)(\mathbb{E}_{22} - \mathbb{E}_{11})$ v systému os tělesa; evidentně v $(\vec{e}_p, e_Q, \vec{c})$ triádě tato přechází na

$\frac{1}{2}(B-A)(\vec{e}_2{}'\vec{e}_2{}' - \vec{e}_1{}'\vec{e}_1{}')$ kde $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ jsou směry hlavních os tenzoru momentu setrvačnosti v $(\vec{e}_p, \vec{e}_a, \vec{c})$ triádu.

tj. můžeme psát

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= \cos\varphi\, \vec{e}_1{}'(0) + \sin\varphi\, \vec{e}_2{}'(0) \\ \vec{e}_2{}' &= -\sin\varphi\, \vec{e}_1{}'(0) + \cos\varphi\, \vec{e}_2{}'(0) \end{aligned}}$$

kde $\boxed{\varphi = \varphi(t) = \omega_{rot} \cdot t}$

Když pás φ průměrujeme nezávisle na f (tj. není spin-orbitální resonance), pak

$\langle \frac{1}{2}(B-A)(e_2'e_2' - e_1'e_1') \rangle_\varphi = 0$ a tedy i příspěvek do $\vec{T}$ je nulový; když ale $\varphi = f$ (jako u Měsíce) je výpočet delší a složitější. Příspěvek je ale $\sim \frac{1}{2}(B-A)$ a to je většinou o řád menší veličina než $C - \frac{1}{2}(A+B)$; dopouštíme se tedy ne úplně veliké chyby.

Ve výsledku tedy máme $(\vec{L} = C\omega\vec{s})$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = C\frac{d(\vec{s}\omega)}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{Gm'}{r^3}\left[C - \frac{1}{2}(A+B)\right](\vec{c}\cdot\vec{s})(\vec{c}\times\vec{s})} \quad (*)$$

Což je výchozí rovnice pro započtení precese-nutace.

[illegible]

Především vidíme, že $\underline{\omega = \text{konst.}}$ v tomto modelu.

Stačí (*) vynásobit $\vec{s}$

$$\vec{s} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{s}\omega) = 0$$

$$\omega \underbrace{\vec{s} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}}_{=0} + \underbrace{\vec{s} \cdot \vec{s}}_{1} \frac{d\omega}{dt} = 0 \rightarrow \underline{\omega = \text{konst.}}$$

$$\text{neb} = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt}$$

Při zavedení

$$\alpha \equiv + \frac{3}{2}\frac{Gm'}{b^3\omega}\frac{C - \frac{1}{2}(A+B)}{C} \approx \frac{3}{2}\frac{n^2}{\omega\eta^3}\frac{C - \frac{1}{2}(A+B)}{C}$$

který nazýváme precesní konstantou

je

$$\boxed{\frac{d\vec{s}}{dt} = -\alpha(\vec{c} \cdot \vec{s})(\vec{c} \times \vec{s})}$$

menuje změny $\vec{s}$ v prostoru

kdyz $\vec{c}$ je fixní

Snadno opět vidíme, že $\vec{c} \cdot \vec{s} = \text{konst.}$ velmi v prostoru

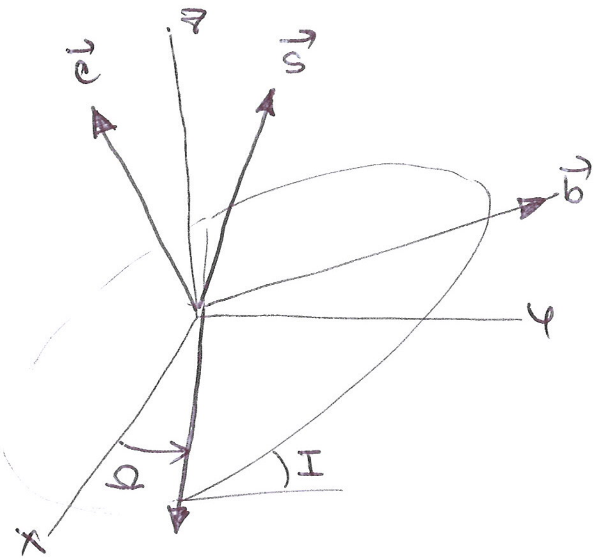
$$\frac{d}{dt}(\vec{c} \cdot \vec{s}) = \vec{c} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = 0$$

"obliquita". Snadno zavedeme $\cos\varepsilon = \vec{c} \cdot \vec{s} \rightarrow \underline{\varepsilon = \text{konst}}$

A přesvědčíme, že $\vec{s}$ se pohybuje kolem $\vec{c}$ po kónu s rozevřením ε a precesuje frekvencí $\underline{-\alpha\cos\varepsilon}$ tj. v záporném směru. Zavedeme systém os že $\vec{c} = (0,0,1)$ pak $s_3 = \cos\varepsilon$ a pro $\underline{s_1}, \underline{s_2}$ máme:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \alpha\cos\varepsilon\, s_2 \\ \dot{s}_2 &= -\alpha\cos\varepsilon\, s_1 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \ddot{s}_1 + \alpha^2\cos^2\varepsilon\, s_1 &= 0 \\ \ddot{s}_2 + \underbrace{\alpha^2\cos^2\varepsilon}_{\omega_p^2}\, s_2 &= 0 \end{aligned}}$$

Předchozí model odpovídal situaci, kdy oběžná dráha tělesa (planety, Měsíce) je fixní v prostoru. To ale většinou <u>není</u>: planety precedují díky vzájemné interakci, měsíční dráha díky vlivu Slunce....
K jakým modifikacím v modelu dojde? To je předmětem zbývající části této kapitoly.



Transformace mezi $(x,y,z) \leftrightarrow (\vec a, \vec b, \vec c)$

$$\vec x' = A\cdot\vec x$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\Omega, & \sin\Omega, & 0 \\ -\cos i\sin\Omega, & \cos i\cos\Omega, & \sin i \\ \sin i\sin\Omega, & -\sin i\cos\Omega, & \cos i \end{bmatrix}$$

dynamické rovnice $\boxed{\frac{d\vec L}{dt} = \vec T}$ které takto platí jen v inerciálním systému (x,y,z) nyní přepíšeme do rotující (pohybující se) soustavy $(\vec a, \vec b, \vec c)$:

$$\boxed{\frac{d\vec L'}{dt} = \frac{d}{dt}(A\vec L) = \frac{dA}{dt}\vec L + A\frac{d\vec L}{dt} = \left(\frac{dA}{dt}A^{-1}\right)\vec L' + \vec T'}$$

a pro model se započtením gravitačního působení centra

$$\boxed{\cancel{C}\,\frac{d(\omega\vec s')}{dt} = \frac{dA}{dt}A^{-1}\cdot\cancel{C}\omega\vec s' - \alpha\cancel{C}\omega(\vec s'\cdot\vec c')(\vec s'\times\vec c')}$$

Opět snadno vidíme, že <u>ω</u> se zachovává k tomu stačí dokázat $\underbrace{\vec{s}'\cdot\frac{dA}{dt}A^{-1}\cdot\vec{s}'}_{\text{antisym. matice}\ \to\ \text{OK.}} = 0$

Pak tedy máme

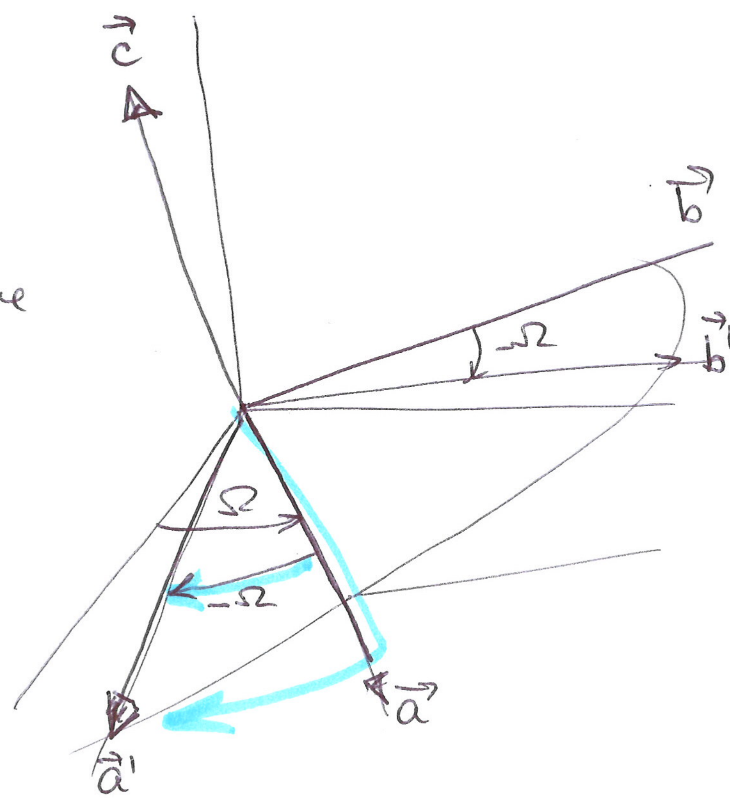
$$\boxed{\frac{d\vec{s}'}{dt} = \frac{dA}{dt}A^{-1}\cdot\vec{s}' - \alpha(\vec{s}'\cdot\vec{c}')(\vec{e}'\times\vec{s}')}$$

nový člen odpovídající pohybu oskulační dráhy.

Tedy modelovým výpočtem máme

$$\frac{dA}{dt}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0, & \dot{\Omega}\cos I, & -\dot{\Omega}\sin I \\ -\dot{\Omega}\cos I, & 0, & +\dot{I} \\ \dot{\Omega}\sin I, & -\dot{I}, & 0 \end{bmatrix}$$

Takováto volba by byla vhodná. V obecnějším případě se zavádí upravený systém, kdy osa $\vec{a}\to\vec{a}'$ otočením o $-\Omega$:



to má tu výhodu, že limita $I\to 0$ nestrácí smysl, neboť $\vec{e}'$ se pak identifikuje s $\vec{e}_x$ (ale $\vec{a}$ ztrácí smysl.). Transformace inerciálního $\to (\vec{a}', \vec{b}', \vec{c})$ systém je pak dána maticí

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\Omega, & -\sin\Omega, & 0 \\ \sin\Omega, & \cos\Omega, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}}_{\text{dodatečná otočení o "}-\Omega\text{"}} A$$

a rovnice pro $\vec{s}\,'$ v tomto systému je

$$\frac{d\vec{s}\,'}{dt} = \frac{d\mathbb{B}}{dt}\mathbb{B}^T \cdot \vec{s}\,' - \alpha(\vec{s}\,'\cdot\vec{c}\,')(\vec{c}\,'\times\vec{s}\,')$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -(\mathbb{B}_{21}) \;, & \dot{I}\sin\Omega + \sin I\cos\Omega\,\dot{\Omega} \\ -(1-\cos I)\dot{\Omega}\;, & 0 & -(\mathbb{B}_{32}) \\ & ,\; \dot{I}\cos\Omega - \dot{\Omega}\sin I\sin\Omega\,, & 0 \end{bmatrix}$$

což též můžeme přepsat

$$\boxed{\frac{d\vec{s}\,'}{dt} = -\left[\alpha(\vec{s}\,'\cdot\vec{c}\,')\,\vec{c}\,' + \vec{\sigma}\right]\times\vec{s}\,'}$$

$$\boxed{\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \dot{I}\cos\Omega - \dot{\Omega}\sin I\sin\Omega \\ \dot{I}\sin\Omega + \dot{\Omega}\sin I\cos\Omega \\ -2\sin^2 I/2\,\dot{\Omega} \end{bmatrix}}$$

ozn. též $\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ -2C \end{bmatrix}$

$\vec{s}\,'$ je jednotkový vektor, tj. můžeme ho parametrizovat sférickými úhly $\vec{s}\,' = \begin{bmatrix} \sin\varepsilon\cos\lambda \\ \sin\varepsilon\sin\lambda \\ \cos\varepsilon \end{bmatrix}$, kde ε je obliquita měřené od precesní osy $\vec{c}$ oběžné dráhy a λ je měřeno od $\vec{a}\,'$. V astronomické tradici se zavádí místo λ <u>precesní úhel</u> ψ tž. $\psi = \pi/2 - \lambda$, pak

$$\vec{s}\,' = \begin{bmatrix} \sin\varepsilon\sin\psi \\ \sin\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon \end{bmatrix}$$

ψ narůstá v opačném směru než λ, tj. $\dot{\psi} \geq 0$ značí precesi v záporném smyslu.

$$\frac{ds_3'}{dt} = \frac{dX}{dt} = -(\vec{\sigma}' \times \vec{s}')_3 = -\sin\varepsilon\,(A\cos\psi - B\sin\psi)$$

při ozn. $X = \cos\varepsilon$: máme

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = +\sqrt{1-X^2}\,(-A\cos\psi + B\sin\psi)} \quad (*)$$

efekty precesující dráhy

$$\frac{ds_1}{dt} = \alpha\cos\varepsilon\, s_2 - B\cos\varepsilon - 2e\, s_2 = \sin\psi\,\frac{d\sin\varepsilon}{dt} + \sin\varepsilon\sin\psi\,\dot{\psi} \qquad /\cdot\sin\psi$$

$$\frac{ds_2}{dt} = -\alpha\cos\varepsilon\, s_1 + A\cos\varepsilon + 2e\, s_1 = \cos\psi\,\frac{d(\sin\varepsilon)}{dt} - \sin\varepsilon\cos\psi\,\dot{\psi} \qquad /\cdot(-\cos\psi)$$

$$(\alpha\cos\varepsilon - 2e)\underbrace{(s_2\cos\psi + s_1\sin\psi)}_{\sin\varepsilon} - \cos\varepsilon\,(A\sin\psi + B\cos\psi) = \sin\varepsilon\,\dot{\psi}$$

$$\dot{\psi} = \alpha\cos\varepsilon - 2e - \frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}(A\sin\psi + B\cos\psi)$$

máme

$$\boxed{\dot{\psi} = \alpha X - 2e - \frac{X}{\sqrt{1-X^2}}(A\sin\psi + B\cos\psi)} \quad (**)$$

regulární precese

efekty precesující dráhy

Snadno se přesvědčíme, že (*) a (**) jsou Hamiltonovy rovnice systém $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X,\psi)$ $(X = \cos\varepsilon,\ \psi)$

$$\boxed{\dot{X} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial X}}$$

při

$$\boxed{\mathcal{H}(X,\psi) = \frac{\alpha}{2}X^2 - 2eX + \sqrt{1-X^2}\,(A\sin\psi + B\cos\psi)}$$

Musíme upozornit, že $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\dots; t)$ neboť $\alpha = \alpha(t)$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = f(t)$; Budeli vývoj dráhy (I, Ω) popsán nesingulární veličinou $\zeta = q + ip = \sin I/2 \exp(i\Omega)$

pak

$$\mathcal{A} = \frac{2(\dot{q} + p\mathcal{C})}{\sqrt{1-q^2-p^2}} \simeq 2\dot{q} + O(3)$$

$$\mathcal{B} = \frac{2(\dot{p} - q\mathcal{C})}{\sqrt{1-q^2-p^2}} \simeq 2\dot{p} + O(3)$$

$$\boxed{\mathcal{A} + i\mathcal{B} = 2\dot{\zeta} + O(3)}$$

$$\mathcal{C} = q\dot{p} - p\dot{q} \simeq O(2)$$

k těmto pojmům se vrátíme na konci této kapitoly.

Probereme nyní nejjednodušší možný případ, kdy I = konst, $\dot{\Omega}$ = konst. (rovnoměrná precedující dráha s konstantním sklonem; může to být také jeden Fourierův mód rozvoje I, Ω). Tomuto modelu se říká Colombův model.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\dot{\Omega} \sin I \sin\Omega \\ \mathcal{B} &= +\dot{\Omega} \sin I \cos\Omega \\ \mathcal{C} &= \dot{\Omega} \sin^2 I/2 \end{aligned}\right\}$$ a dosazením do $\mathcal{H}$

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{\alpha}{2} X^2 - 2\dot{\Omega} \sin^2 I/2\, X + \dot{\Omega} \sin I \sqrt{1-X^2} \cos(\varphi + \Omega)}$$

kde $\Omega = \Omega(t) = \dot{\Omega} t + \Omega_0$

Zavedeme nové kanonické proměnné $(X,\psi)\to(X',\varphi)$

$$\boxed{\begin{aligned} X' &= -X = -\cos\varepsilon \\ \varphi &= -(\psi+\Omega) \end{aligned}}$$

pomocí vytvořující fce

$$\boxed{F(\psi, X'; t) = -X'(\psi+\Omega)}$$

(neboť $X = \frac{\partial F}{\partial \psi} = -X'$; $\varphi = \frac{\partial F}{\partial X'} = -(\psi+\Omega)$ a časová závislost skrze $\Omega(t)$).

pak nový Hamiltonián $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{H} - X'\dot{\Omega}$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \frac{\alpha}{2}X'^2 + 2\dot{\Omega}\sin^2 I/2\, X' + \dot{\Omega}\sin I\sqrt{1-X'^2}\cos\varphi - \dot{\Omega}X' = \\ &= \frac{\alpha}{2}X'^2 - \dot{\Omega}\cos I\, X' + \dot{\Omega}\sin I\sqrt{1-X'^2}\cos\varphi \end{aligned}}$$

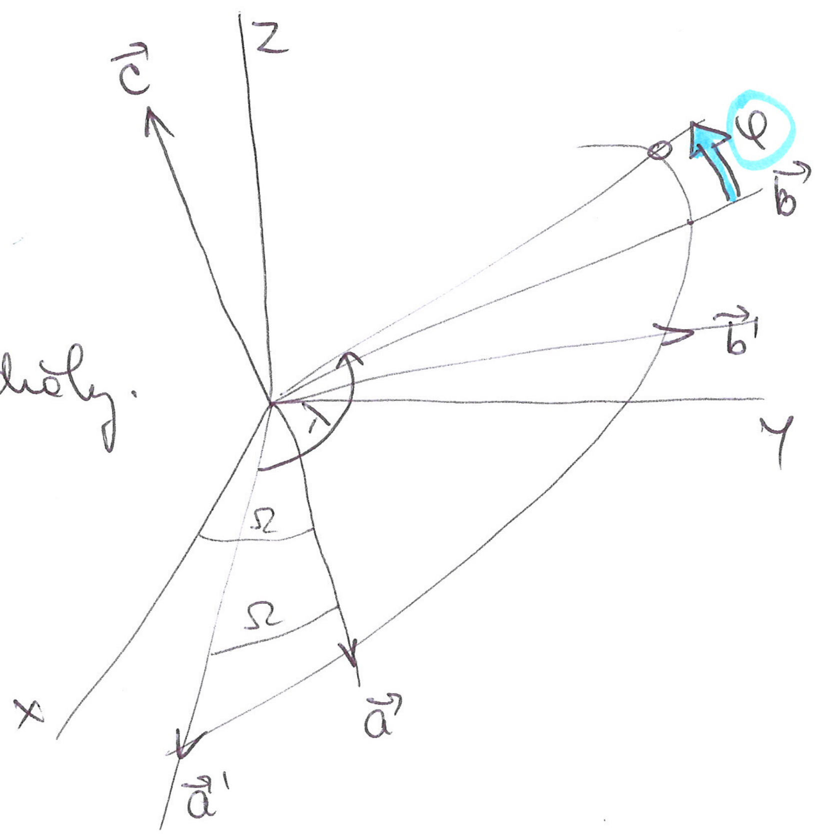
(dále vypustíme ′ nad X').

Hamiltonián $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(X',\varphi)$ je již časově nezávislý a tudíž existuje integrál $\mathcal{H}' = \text{konst.}$, tzv. Colombův integrál.

Poznamenejme, že

$$\boxed{\varphi = -\psi - \Omega = \lambda - \pi/2 - \Omega}$$

tj. úhel φ je měřený od osy $\vec{b}$ v oběžné rovině dráhy.



Příslušné Hamiltonovy rovnice jsou

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \dot{\Omega} \sin I \sin\varphi && (1) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\alpha\cos\varepsilon - \dot{\Omega}\cos I + \dot{\Omega}\frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin I\cos\varphi && (2) \end{aligned}} \quad (*)$$

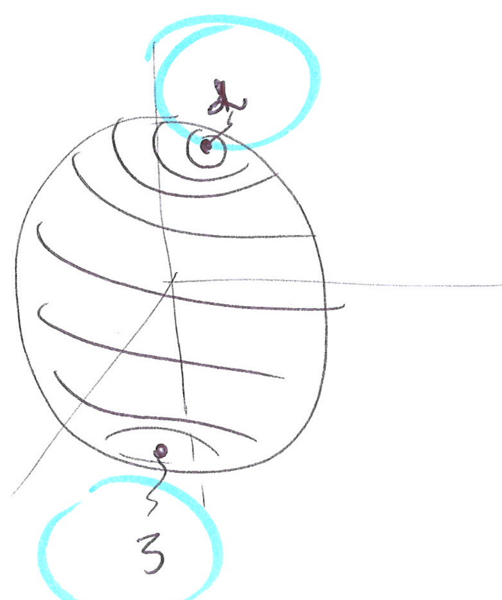
Stacionární řešení rovnic – tzv. Cassiniho stavy – mají vektor konstantní polohu $\vec{s}'$ vůči rotující orbitální rovině. Z (1) vidíme $\varphi = 0, \pi$ a pak (2) dává

$$(**) \quad \boxed{\kappa \sin 2\varepsilon = -\sin(\varepsilon \pm I)} \qquad + : \varphi = \pi, \quad - : \varphi = 0 \qquad \boxed{\kappa \equiv \frac{\alpha}{2\dot{\Omega}} < 0}$$

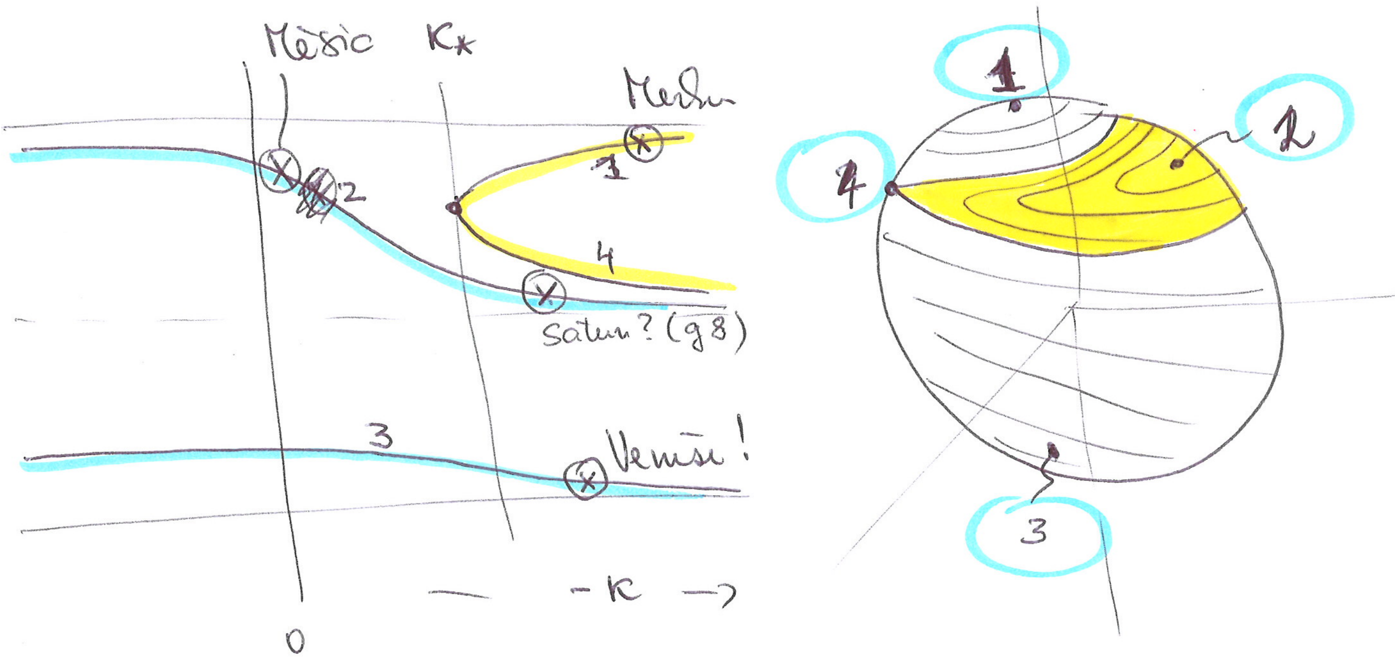
Rovnice (**) je transcendentní, ale řešení lze prozkoumat:

- pro $|\kappa| \le \kappa_* = \frac{1}{2}\left(\sin^{2/3} I + \cos^{2/3} I\right)^{3/2}$ jsou jen 2 řešení, jedno pro $\varphi = 0$, jedno pro $\varphi = \pi$. Cassiniho stavy 2 a 3.

Úhly (ε, φ) definují jedn. vektor $\vec{s}'$



▪ pro $|K| > K_*$ máme 4 stacionární řešení



jmenovitě v $K = K_*$ stav 2 se stane stacionárním bodem rezonanční zóny; kolem něho může φ librovat v omezené oblasti kolem 0°. Stavy 1 & 3 opět blízko pólu $\vec{c}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$.

U Měsíce $\dot{\Omega} \simeq 2\pi/18.6\,y$ je příliš rychlé, tedy $|K| \ll K_*$. Měsíc je dnes v Cassiniho stavu 2; většina dalších satelitů též. V minulosti však Měsíc mohl být v 1; velmi zajímavé. Hypotéza. Venuše i Merkur jsou též v Cassiniho stavech! Venuše ve 3. Mnohé asteroidy librují kolem 1 (Koronis)...

Vraťme se nyní k obecném systému (X,ψ); mějme sklon dráhy planety je malý, pak

$$\boxed{\begin{aligned} A+iB &\simeq 2\xi \\ A-iB &\simeq 2\bar{\xi} \\ e &\simeq 0 \end{aligned}}$$

z rovnice $\frac{dx}{dt}=\sqrt{1-x^2}\,(-A\cos\psi+B\sin\psi)$

máme $\quad -\cancel{\sin\varepsilon}\,\dot{\varepsilon}=\cancel{\sin\varepsilon}\,(-A\cos\psi+B\sin\psi)$, tj.

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= A\cos\psi-B\sin\psi=\tfrac{1}{2}\left\{(A+iB)e^{i\psi}+(A-iB)e^{-i\psi}\right\} \\ &\approx \dot{\xi}e^{i\psi}+\dot{\bar{\xi}}e^{-i\psi}\end{aligned}} \quad (*)$$

zároveň

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\psi} &\simeq \alpha\cos\varepsilon-\frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}\frac{1}{2i}\left[(A+iB)e^{i\psi}-(A-iB)e^{-i\psi}\right]\approx \\ &\simeq \alpha\cos\varepsilon+\frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,i\left(\dot{\xi}e^{i\psi}-\dot{\bar{\xi}}e^{-i\psi}\right)\end{aligned}}$$

postupujeme iteračně, $\dot{\psi}_0=\underbrace{\alpha\cos\varepsilon}_{\sigma}+\emptyset \rightarrow \boxed{\psi_0=\sigma t+\psi_{00}}$

a to dosadíme do $*$)

$$\boxed{\dot{\varepsilon}=\dot{\xi}e^{i\psi_0}+\dot{\bar{\xi}}e^{-i\psi_0}}$$

na pravé straně známé funkce času, tj. jen integrujeme a dostaneme $\varepsilon(t)$

Pro planetární systém jsme ukázali, že

$$\xi \approx l_0+\sum_j l_j e^{i(s_jt+\gamma_j)}$$

$$\dot{\xi}\simeq i\sum_j s_j l_j e^{i(s_jt+\gamma_j)}$$

a tudíž po integraci ε

$$\boxed{\varepsilon(t) \simeq \sum_j l_j \frac{s_j}{s_j+\sigma}\, e^{i[(s_j+\sigma)t+\gamma_j+\psi_{00}]} + \sum l_j \frac{s_j}{s_j+\sigma}\, e^{-i[(s_j+\sigma)t+\gamma_j+\psi_{00}]}}$$

periodické řešení!

Příklady:

△ pro Zemi je $\sigma \simeq 50.4''/y$ $(= \underbrace{34.8''/y}_{\text{příspěvek Měsíce}} + \underbrace{15.6''/y}_{\text{příspěvek Slunce}})$; nejdůležitější „čára" v rozvoji Zemského ξ má frekvenci $\sim -18.8''/y$ (a amplitudu $\sim 0.91°$), následuje další čára $s \sim -17.76''/y$ ...
$(s_1+\sigma)$ má tedy periodu $\approx$ 41 ky a asi poloviční amplitudu v ε.
→ projevuje se jako nejdůležitější člen v teorii paleoklimatu.

△ pro Mars je jen sluneční člen $\sigma \simeq 7.58''/y$ a důležité členy v rozvoji ξ mají $s \simeq (17-18)''/y$ ale také $-(5.6 - 7.1)''/y$
→ působí velké rezonanční efekty na ε Marsu → obliquita Marsu vykazuje veliké variace $0°-60°$ na časové škále ~ 5My jenom

△ Jupiter, odhadnuté $\sigma \simeq 2.741''/y$ a v řadě ξ má blízkou čáru $s_6 \sim -2.99''/y$ (i když ne největší; $I_6 \simeq 0.052°$)
je pravděpodobné, že velká část Jupiterovy obliquity $\epsilon \sim 3°$ je dána blízkostí nuceného Cassiniho stavu 2!
pro s_6

- pro Saturn je překvapivá obliquita $26^\circ.7$.

odhadnuté $\sigma \simeq 0.83''/y$ může resonovat s $s_8 \simeq 0.69''$ s amplitudou $I_8 \simeq 0.064^\circ$, ve skutečnosti může být v resonanční libraci kolem Cassiniho stavu 2 s $\epsilon_{2,Cass} \simeq 27.1^\circ$!!

skutečnou otázkou však je ukázat, jak mohla být Saturnova osa zachycena do tohoto stavu.